בוחן אמצע, סמסטר חורף תשפ"ב - אלגברה 1/מ, 104016
5.12.21

פתרונות מלאים

ת"ז :

פקולטה :

- משך הבוחן : 2 שעות.
- השימוש בחומר עזר כלשהו ובמחשבונים אסור בהחלט.
- רשמו את כל תשובותיכם בדפים אלה. אפשר להשתמש בשני צידי הדף.
- **בשאלות 1-2** יש **לנמק** היטב כל תשובה. תשובה לא מנומקת לא תחשב.
  בשאלות 3-7 יש לסמן את התשובה הנכונה בטבלה שבעמוד זה. בכל שאלה יש רק סימון אחד נכון.
- **אין צורך לרשום נימוקים בשאלות 3-7.** נימוקים בשאלות אלה לא יבדקו.

ב ה צ ל ח ה !

טבלה לסימון תשובות נכונות בשאלות 3-7

	שאלה מס' 3	שאלה מס' 4	שאלה מס' 5	שאלה מס' 6	שאלה מס' 7
א.					
ב.					
ג.					
ד.					
ה.					

<u>שאלה מס' 1</u> : (29 נקודות). בשאלה זו יש לתת פתרון מלא ומנומק

נתונה מערכת המשוואות $A\overline{x}=b$ עם ארבעה נעלמים ממשיים x,y,z,w כאשר $\alpha\in\mathbb{R}$ פרמטר :

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 2x+(\alpha^2-2)y+(\alpha+2)z+(\alpha-1)w=\alpha+2 \\ 3x+(\alpha^2-1)y+(\alpha+4)z+(2\alpha-2)w=2\alpha+2 \end{cases}$$

א. (15 נק')
(i) לאילו ערכים של α יש למערכת פתרון יחיד?
(ii) לאילו ערכים של α יש למערכת אינסוף פתרונות?
(iii) לאילו ערכים של α אין למערכת פתרון?

ב. (7 נק') מצאו את מספר דרגות החופש בכל המקרים בהם למערכת יש אינסוף פתרונות, ורשמו את הפתרון הכללי בכל המקרים בהם למערכת יש 2 דרגות חופש.

ג. (5 נק') קבעו האם הטענה הבאה נכונה או לא והסבירו : קיים בדיוק ערך אחד של α כך שלמערכת ההומוגנית $A\overline{x}=0$ יש אינסוף פתרונות עם 2 דרגות חופש.

2 נק' יינתנו על דירוג נכון.

בסוף הפתרון המפורט, אנא רכזו את תשובותיכם הסופיות בטבלה שבסוף השאלה.

<u>פתרון לשאלה מספר 1:</u>

נדרג את מטריצת המקדמים המורחבת :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & \alpha^2-2 & \alpha+2 & \alpha-1 & \alpha+2 \\ 3 & \alpha^2-1 & \alpha+4 & 2\alpha-2 & 2\alpha+2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha^2-4 & \alpha-2 & \alpha-1 & \alpha \\ 0 & \alpha^2-4 & \alpha-2 & 2\alpha-2 & 2\alpha-1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha^2-4 & \alpha-2 & \alpha-1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & \alpha-1 \end{array}\right)$$

מראש יש רק 3 משוואות עם 4 נעלמים ולכן אין מקרה של פתרון יחיד.
נבדוק מתי יש סתירה ובכל שאר המקרים יש אינסוף פתרונות. סתירה יכולה להתקבל מערכים המאפסים איברים מובילים :

$$\alpha^2-4=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha=2\,,\,-2$$
$$\alpha-1=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha=1$$

הצבות :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha^2-4 & \alpha-2 & \alpha-1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & \alpha-1 \end{array}\right) \underset{\alpha=2}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad r(A|b)>r(A)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha^2-4 & \alpha-2 & \alpha-1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & \alpha-1 \end{array}\right) \underset{\alpha=-2}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \quad r(A|b)=r(A)\ ,\ \ n-r(A)=4-3=1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha^2-4 & \alpha-2 & \alpha-1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & \alpha-1 \end{array}\right) \underset{\alpha=1}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad r(A|b)=r(A)\ ,\ \ n-r(A)=4-2=2$$

א. **פתרון יחיד** לא קיים לכל $\alpha\in\mathbb{R}$; **סתירה** עבור $\alpha=2$; **אינסוף פתרונות** עבור $\alpha\neq 2$.

ב. כל המקרים בהם יש אינסוף פתרונות הם: $\alpha \neq 2$. לכל $\alpha \neq 2,1$ יש דרגת חופש אחת וכאשר $\alpha = 1$ יש שתי דרגות חופש. נרשום את הפתרון הכללי רק במקרה זה:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x - 5y = 3 \\ 3y + z = -1 \end{cases} \qquad (x, y, z, w) = (3 + 5y, y, -1 - 3y, w)$$

ג. הטענה לא נכונה. למערכת ההומוגנית $A\overline{x} = 0$ יש אינסוף פתרונות עם 2 דרגות חופש בכל המקרים בהם מתקיים: $n - r(A) = 4 - r(A) = 2$ כלומר בכל המקרים בהם $r(A) = 2$ וזה קורה עבור $\alpha = 2,1$

<u>שאלה מס' 2</u> : (36 נקודות) בשאלה זו יש לתת פתרון מלא ומנומק

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית מספרית את **4** הטענות הבאות (במקרה של מתן דוגמא נגדית מספרית, יש להסביר מדוע זו דוגמא נגדית):

א. (9 נק') יהי $z \in \mathbb{C}$ כך ש $z^{2n} \neq -1$.

אם $|z| = 1$ אזי $\frac{z^n}{1+z^{2n}}$ הוא מספר ממשי.

טענה נכונה: נכפול מונה ומכנה בצמוד של המכנה. הצמוד של המכנה הוא:
$\overline{1+z^{2n}} = \overline{1} + \overline{z^{2n}} = 1 + \left(\overline{z}^n\right)^2$.

$$\frac{z^n}{1+z^{2n}} \cdot \frac{1+(\overline{z}^n)^2}{1+(\overline{z}^n)^2} = \frac{z^n(1+(\overline{z}^n)^2)}{\left|1+z^{2n}\right|^2} = \frac{z^n + z^n(\overline{z}^n)^2}{\left|1+z^{2n}\right|^2} = \frac{z^n + z^n\left(\overline{z}^n\overline{z}^n\right)}{\left|1+z^{2n}\right|^2} =$$

$$\frac{z^n + \left(z^n\overline{z}^n\right)\overline{z}^n}{\left|1+z^{2n}\right|^2} = \frac{z^n + \left|z^n\right|^2\overline{z}^n}{\left|1+z^{2n}\right|^2} = \frac{z^n + (|z|^2)^n\overline{z}^n}{\left|1+z^{2n}\right|^2} = \frac{z^n + 1\cdot\overline{z}^n}{\left|1+z^{2n}\right|^2} = \frac{z^n + \overline{z}^n}{\left|1+z^{2n}\right|^2} = \frac{2\operatorname{Re}(z^n)}{\left|1+z^{2n}\right|^2} \in \mathbb{R}$$

ב. (9 נק') אם $A\,,\,B\,,\,C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ הן מטריצות שונות מ- 0 כך ש $AB = AC$ אזי $B = C$.

טענה לא נכונה: דוגמא נגדית: נעביר אגפים ונקבל: $AB - AC = 0$. נוציא את A לצד שמאל:
$A(B-C) = 0$. נבחר שתי מטריצות שונות מ- 0 שמכפלתם 0: $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix} = 0$. נגדיר:
$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B - C = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$. אם למשל $B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ אז $C = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ יקיימו את הדרישה.

ג. (9 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. אם למערכת $A\bar{x} = 0$ יש אינסוף פתרונות, אזי קיים $b \in \mathbb{R}^m$ כך שלמערכת $A\bar{x} = b$ אין פתרון.

טענה לא נכונה: למשל נבחר: $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ אז למערכת $A\bar{x} = 0$ יש אינסוף פתרונות (כי יש 3 נעלמים ודרגה 2) ולכל $b \in \mathbb{R}^2$ נקבל שלמערכת יש גם אינסוף פתרונות כי מתקיים:
$r(A|b) = r(A) = 2 < n = 3$.

ד. (9 נק') אם $A\,,\,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מקיימות $AB = 0$ וגם $A + B = I_n$ אזי $A^2 = A$ וגם $B^2 = B$.

טענה נכונה: נתון $A + B = I_n$ נכפול ב A משמאל ונקבל: $A^2 + AB = A$. אבל נתון $AB = 0$ ולכן $A^2 = A$. עכשיו נכפול את $A + B = I_n$ ב B מימין ונקבל: $AB + B^2 = B$. אבל נתון $AB = 0$ ולכן $B^2 = B$.

<u>יש לסמן את התשובה הנכונה לשאלות 3-7 בטבלה שבדף הראשון. נימוקים לא יבדקו.</u>
<u>יותר מסימון אחד יגרור ניקוד 0 על השאלה.</u>

<u>שאלה מס' 3</u> : (7 נק')

יהי $f(x)=x^6+ax^4+bx^3$ פולינום עם מקדמים ממשיים ו- $a,b\neq 0$, אזי:

א. ל- $f(x)$ יש שורש ממשי חיובי.

ב. ל- $f(x)$ אין שורשים ממשיים פרט ל- 0.

ג. אם $2+5i$ הוא שורש של $f(x)$ אז גם 4 הוא שורש של $f(x)$.

ד. אם z הוא שורש לא ממשי של $f(x)$ אז $f'(z)\neq 0$.

ה. ל- $f(x)$ אין שורש מריבוי 2.

<u>פתרון לשאלה מספר 3:</u>

נתון $f(x)=x^6+ax^4+bx^3$ פולינום ממשי. נכתוב $f(x)=x^3\left(x^3+ax+b\right)=x^3g(x)$. נשים לב שנובע מהנתונים כי לפולינום $f(x)$ יש שורש $x_1=0$ מריבוי 3 (כי $b\neq 0$ וכן שלושה שורשים נוספים: x_2,x_3,x_4 המקיימים שהם גם השורשים של $g(x)$ ולכן מקיימים: $x_2+x_3+x_4=0$ (מקדם x^2 בפולינום $g(x)$) וכן $x_2\cdot x_3\cdot x_4=(-1)^3b=-b$.

א. לא נכון. למשל: נבחר $b=4$, $x_4=-2$, $x_3=1-i$, $x_2=1+i$.

ב. לא נכון. למשל הדוגמא בסעיף א'.

ג. לא נכון. אם $2+5i$ הוא שורש של $f(x)$ אז גם $2-5i$ הוא שורש. סכום השורשים הוא 0 ולכן גם -4 הוא שורש ולא 4.

ד. נכון. כי שורש לא ממשי לא יכול להיות מריבוי 2 כי אז היו עוד שני שורשים בזמן שחסרים רק 3 שורשים. לכן בהכרח אם קיים שורש לא ממשי z , הוא בהכרח מריבוי 1 כלומר $f'(z)\neq 0$.

ה. לא נכון. יתכן שורש מריבוי 2 שהוא ממשי למשל נבחר $b=2$, $x_4=-2$, $x_3=1$, $x_2=1$.

סימון נכון: ד'.

<u>שאלה מס' 4</u> : (7 נק')

נתונה המשוואה $z^5 = t^3$ כאשר $t = 2cis20^\circ$. נסמן ב- z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 את פתרונות המשוואה כך ש:

$0 \le \arg(z_1) < \arg(z_2) < \arg(z_3) < \arg(z_4) < \arg(z_5) < 360^\circ$, אזי $\arg\left(\frac{z_3 \cdot z_4}{z_5}\right)$ שווה ל:

א. 228° ; ב. 84° ; ג. 24° ; ד. 36° ; ה. 126° .

<u>פתרון לשאלה מספר 4:</u>

נפתור את המשוואה ונזהה את הארגומנטים לפי הסדר מהקטן לגדול ונחשב את הארגומנט המבוקש:

$$t = 2cis20^\circ$$

$$z^5 = t^3 = 8cis60^\circ$$

$$z = \sqrt[5]{8cis60^\circ} = \sqrt[5]{8}cis\frac{60^\circ + 360^\circ k}{5} = \sqrt[5]{8}cis(12^\circ + 72^\circ k) \ , \ k = 0,...,4$$

$$\arg(z_1) = 12^\circ \ , \ \arg(z_2) = 84^\circ \ , \ \arg(z_3) = 156^\circ \ , \ \arg(z_4) = 228^\circ \ , \ \arg(z_5) = 300^\circ$$

$$\arg\left(\frac{z_3 \cdot z_4}{z_5}\right) = \arg(z_3) + \arg(z_4) - \arg(z_5) = 156^\circ + 228^\circ - 300^\circ = 84^\circ$$

סימון נכון: ב'.

<u>שאלה מס' 5</u> : (7 נק')

יהיו: $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ שונות מ- 0, המקיימות: $BA = B$, $AB = 2A$. יהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ המקיימים $A^2 = \alpha A$, $B^2 = \beta B$, אזי:

א. α, β לא קיימים.

ב. $\alpha + \beta = 3$.

ג. $\alpha + \beta = 2$.

ד. $\alpha + \beta = 1$.

ה. $\alpha + \beta = 0$.

<u>פתרון לשאלה מספר 5:</u>

נכפול את: $AB = 2A$ ב- B משמאל ונקבל: $BAB = 2BA$. נציב $BA = B$ ונקבל: $BB = 2B$, כלומר $B^2 = 2B$ ולכן נבחר: $\beta = 2$.

נכפול את: $BA = B$ ב- A מימין ונקבל: $ABA = AB$. נציב $AB = 2A$ ונקבל: $2A^2 = 2A$, כלומר $A^2 = A$ ולכן נבחר: $\alpha = 1$. ולכן $\alpha + \beta = 3$.

סימון נכון: ב'.

<u>שאלה מס' 6</u> : (7 נק')

יהיו $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כאשר $n\ge 4$. נתון כי השורה השלישית של A היא שורת אפסים וכן השורה הרביעית של B היא שורת אפסים. אזי בהכרח:

א. השורה הרביעית של AB היא שורת אפסים.

ב. השורה השלישית של BA היא שורת אפסים.

ג. השורה השלישית של AB היא שורת אפסים.

ד. העמודה השלישית של A^tB היא עמודת אפסים.

ה. העמודה השלישית של B^tA היא עמודת אפסים.

<u>פתרון לשאלה מספר 6:</u>

לפי הגדרת כפל מטריצות התשובה היחידה שנכונה היא ג': השורה השלישית של AB היא 0 כי כאשר נכפול את שורה 3 של A עם האיברים בעמודות B נקבל: $(AB)_{3j}=\sum_{k=1}^{n}a_{3k}b_{kj}=\sum_{k=1}^{n}0\cdot b_{kj}=0$ לכל $j=1,\dots,n$.

סימון נכון: ג'.

<u>שאלה מס' 7</u> : (7 נק')

תהי $A\in\mathbb{R}^{3\times 5}$. נתונים 3 פתרונות של המערכת הלינארית האי הומוגנית $A\overline{x}=b$:

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\\1\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

אזי, בהכרח:

א. $rank(A)=2$.

ב. למערכת $A\overline{x}=0$ יש בדיוק 2 דרגות חופש.

ג. למערכת $A\overline{x}=c$ יש אינסוף פתרונות לכל $c\in\mathbb{R}^3$.

ד. גם $w=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת $A\overline{x}=b$.

ה. גם $w=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת $A\overline{x}=b$.

<u>פתרון לשאלה מספר 7:</u>

למערכת הלינארית האי הומוגנית $A\overline{x}=b$ יש 3 פתרונות ולכן יש לה אינסוף פתרונות. יש 3 משוואות ו- 5 נעלמים ולכן למערכת יש לפחות 5-3=2 דרגות חופש (יתכן ולא כל המשוואות רלוונטיות ואז יהיו יותר דרגות חופש מ- 2), ולכן:

א. לא נכון. $5-r(A)\geq 2$ כלומר $r(A)\leq 3$ ויתכן כי הדרגה היא 3.

ב. לא נכון. לממ"ל ההומוגנית יש לפחות 2 דרגות חופש מאותם הנימוקים שהוסברו קודם.

ג. לא נכון כי אם הדרגה של A היא 2 ותתאפס שורה, ניתן יהיה למצוא וקטור c עבורו לממ"ל $A\overline{x}=c$ אין פתרון. ברור כי אם יש פתרון אז יש אינסוף אבל לא בהכרח יש פתרון.

ד. נכון. ניתן לראות ש- $w=v_2-v_1+v_3$ ולכן:

$$Aw=A(v_2-v_1+v_3)=Av_2-Av_1+Av_3=b-b+b=b$$

ה. לא נכון. ניתן לראות ש- $w=v_1-v_3$ ולכן: $Aw=A(v_1-v_3)=Av_1-Av_3=b-b=0$. כלומר זהו פתרון לממ"ל ההומוגנית המתאימה.

סימון נכון: ד'.